三角形最值 大题

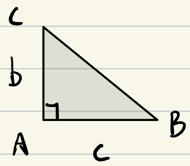
1° 均值不等式
2° 化一角一函数

在△ABC 中，$a\cos B - b\cos A = c$，$b+c=4$，则△ABC 面积的最大值为 2 .

$a\cos B - b\cos A = a\cos B + b\cos A$ 射影定理

$2b\cos A = 0$

$A = \frac{\pi}{2}$



$b+c=4 \geq 2\sqrt{bc} \Rightarrow bc \leq 4$ 当且仅当 $b=c$时取等.

$S = \frac{1}{2}bc \leq 2$

已知 a，b，c 分别为△ABC 三个内角 A，B，C 的对边，$a=2$，且 $(2+b)(\sin A-\sin B)=(c-b)\sin C$，则△ABC 面积的最大值为________.

$(2+b)(a-b) = (c-b)\cdot c$

$\overset{\shortparallel}{a}$

$a^2-b^2 = c^2-bc$ 余弦定理

$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$

$A = \frac{\pi}{3}$

在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且满足 $(\sqrt{2}a-c)\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = c\,\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 若 $|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}| = \sqrt{6}$，求△ABC 面积的最大值.

(1) $(\sqrt{2}a-c)\,c\cdot a\cos B = c\cdot a\,b\cos C$

$\sqrt{2}a\cos B = c\cdot\cos B + b\cos C$ (射影定理)

$\sqrt{2}\sin A\cos B = \sin C\cdot\cos B + \sin B\cos C = \sin(B+C) = \sin A$

$\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$B = \frac{\pi}{4}$

(2) $|\overrightarrow{CA}| = b = \sqrt{6}$

考小题 画圆.

余弦定理 + 均值不等式 求面积

$S = \frac{1}{2}ac\cdot\sin B = \frac{\sqrt{2}}{4}ac$

$\cos B = \frac{a^2+c^2-b}{2ac} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$a^2+c^2-b = \sqrt{2}ac$

$a^2+c^2 \geq 2ac$

$b+\sqrt{2}ac \geq 2ac$

$ac \leq \frac{b}{2-\sqrt{2}} = \frac{b(2+\sqrt{2})}{2} = 3(2+\sqrt{2})$

$S_{max} = \frac{\sqrt{2}}{4}\times 3(2+\sqrt{2})$

在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c. 已知 B 为锐角，向量 $\boldsymbol{m}=(2\sin B, -\sqrt{3})$，$\boldsymbol{n}=\left(\cos 2B, 2\cos^2\frac{B}{2}-1\right)$，且 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$.

(1) 求角 B 的大小及当 $b\in[\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$ 时，△ABC 的外接圆半径 R 的取值范围；

(2) 如果 $b=2$，求△ABC 面积的最大值.

(1) $2\sin B\cdot\cos B=-\sqrt{3}\cos 2B$

$\sin 2B=-\sqrt{3}\cos 2B$

$\tan 2B=-\sqrt{3}$

$B=\frac{\pi}{3}$

$2R=\frac{b}{\sin B}=\frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\in[2,4]$

$\therefore R\in[1,2]$

(2) $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac\le\sqrt{3}$

$\cos B=\frac{a^2+c^2-4}{2ac}=\frac{1}{2}$

$ac+4=a^2+c^2\geq 2ac$

$ac\le 4.$

在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知 $a=1$，$\boldsymbol{m}=(1, -\sqrt{3})$，$\boldsymbol{n}=(\sin A, \cos A)$，且 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$.

(1) 求角 A 的大小；

(2) 若△ABC 的面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}$，求 $b+c$ 的值；

(3) 求△ABC 周长的取值范围.

(1) $\vec{m}\cdot\vec{n}=\sin A-\sqrt{3}\cos A=0.$

$\Rightarrow \tan A=\sqrt{3}$

$A=\frac{\pi}{3}$

(2) $S_\Delta=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc=\frac{\sqrt{3}}{4}\Rightarrow bc=1$

$\cos A=\frac{(b+c)^2-2bc-1}{2bc}=\frac{1}{2}$

$(b+c)^2=3bc+1=4$

$b+c=2.$

$1<b+c\le 2$

已知△ABC 的面积为 $2\sqrt{3}$，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4$.

$cb\cos A=4$

(1) 求角 A；

(2) 求$\frac{b+c}{2a}$的最大值.

余弦定理
+
均值不等式

(1) $S=\frac{1}{2}bc\sin A=2\sqrt{3}$

$\frac{1}{2}\tan A=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$A=\frac{\pi}{3}.$

(2) $\cos A=\frac{(b+c)^2-2bc-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$

$(b+c)^2=3bc+a^2\le\frac{3}{4}(b+c)^2+a^2$

$\frac{b+c}{2a}\le 1.$

在锐角$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，若$\sqrt{3}(a\cos B+b\cos A)=2c\sin C$，$b=1$，则$c$的取值范围为________.

c

$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$C=\frac{\pi}{3}$ $b=1$

$\frac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sin B}$

$c=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin B}\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right)$ $\sin B\in\left(\frac{1}{2},1\right)$

在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，$C=\frac{\pi}{3}$.

余弦定理

(1) 若$ab=4a^2-c^2$，求$\frac{\sin B}{\sin A}$的值；

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2+ab-4a^2}{2ab}=\frac{1}{2}$.

$b^2=3a^2$

$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$.

(2) 求$\sin A\sin B$的取值范围.

$\sin A\cdot\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)$